

ISTITUZIONI DI ANALISI E GEOMETRIA MOD A
PROVA SCRITTA DEL 4 LUGLIO 2011

- (1) Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni misurabili quasi ovunque finite su uno spazio con misura (X, \mathcal{A}, μ) . Supponendo che

$$f_n \rightarrow 0 \text{ , in misura,}$$

e data g misurabile, stabilire se vale che

$$gf_n \rightarrow 0 \text{ , in misura,}$$

sotto una delle seguenti ipotesi:

- a) g è limitata,
- b) g è integrabile.

- (2) Sia dato uno spazio con misura (X, \mathcal{A}, μ) σ -finito. Sia λ la misura di Lebesgue su \mathbb{R} . Data $f \in L^1(X)$ e posto

$$E = \{(x, t) \in X \times \mathbb{R} \mid 0 < t < |f(x)|\}$$

calcolare $\mu \times \lambda(E)$.

- (3) Sia data la famiglia

$$\mathcal{F} = \left\{ f(x) = \sin \left(\int_{[0,x]} \varphi \right) \mid \varphi \in L^2(0,1) , \|\varphi\|_2 \leq 1 , x \in (0,1) \right\} ,$$

stabilire se \mathcal{F} è relativamente compatta in $L^2(0,1)$.